Chapitre 28 : Fonctions de deux variables

Continuité

Exercice 1: Étudier la continuité de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(0,0)=0$ et telle que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=(x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
4. $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^4}$
5. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
6. $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

Dérivées partielles et directionnelles

Exercice 2: Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles de

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \mathbf{e}^x\cos(y)\end{array}\right. \quad \text{et de} \quad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \mathbf{e}^{x\cos(xy)}\end{array}\right.$$

Exercice 3: On considère l'application $f:(x,y)\mapsto\sin(xy)$.

1. Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ le vecteur gradient de f.
2. Déterminer les plans tangents au graphe de f au point $(1,0)$ et $(1,\frac{\pi}{2})$.

Exercice 4: Calculer la dérivée (si elle existe) de l'application $f:(x,y)\mapsto 3x^2y-4xy$ au point $a=(1,2)$ suivant le vecteur $v=(1,1)$ de deux façons différentes.

Exercice 5: Soit $f:(x,y)\mapsto\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

1. Déterminer puis représenter l'ensemble de définition D_f.
   On représentera ce dernier dans $[-3;3]^2$.
2. Déterminer et représenter les lignes de niveau $\mathcal{C}_{-2}$ et $\mathcal{C}_1$.
   On rappelle que, pour tout $k\in\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k=\{(x,y)\in D_f, f(x,y)=k\}$.
3. Déterminer et représenter le gradient de f aux points $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(-2,-2)$.

Exercice 6: Soient $f:(x,y)\mapsto x\cos(y)+y\exp(x)$, $\theta\in[0;2\pi[$ et $v=(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Pour quels θ la dérivée directionnelle $D_vf(0,0)$ est-elle maximale/minimale/nulle ?

Règles de la chaîne

Exercice 7: Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On pose $h:(u,v)\mapsto f(uv,u^2-v^2)$. Montrer que $h\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

Exercice 8: Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On pose $g_1:x\mapsto f(x,-x)$; $g_2:(x,y)\mapsto f(y,x)$; $g_3:x\mapsto f(x,f(x,-x))$ et $g_4:(x,y)\mapsto f(y,f(x,-x))$.
Montrer que ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$), et calculer leurs dérivées (ou dérivées partielles) en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 9: Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^3+y^3}$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 10: Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=4$.

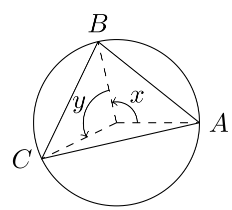
Extremum

Exercice 11: Étudier les extrema locaux de la fonction $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4-x^2+y^2$.

Exercice 12: Déterminer les extrema locaux de la fonction $f:(x,y)\mapsto x\mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 13: Soient A, B et C, trois points du plan d'affixes respectives 1, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(x+y)}$ où $x,y\in]0,\pi[$.

1. À l'aide d'un déterminant, démontrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}(\sin(x)+\sin(y)-\sin(x+y))$.
2. Déterminer les points critiques de la fonction de deux variables $f:(x,y)\mapsto\sin(x)+\sin(y)-\sin(x+y)$ définie sur l'ouvert $]0,\pi[^2$.



On montre ainsi (avec des théorèmes de spé en plus) que parmi les triangles inscrits dans le cercle unité, ceux d'aire maximale sont les triangles équilatéraux.